Asymptotische oplossing van lineaire en verwante differentiaalvergelijkingen

Koksma, Jan

INLEIDING

§ 1. In dit proefschrift wordt van een zeker type gewone differentiaalvergelijkingen het asymptotische gedrag der integralen onderzocht. Uitgangspunt is de theorie der lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten. Daarbij wordt speciaal gebruik gemaakt van de van BOOLE afkomstige z.g. *symbolische* oplossingsmethode. Van deze methode laten we hier een korte uiteenzetting volgen.

Men kan de ν-de afgeleide $y^{(\nu)}(x)$ van een functie $y(x)$ voorstellen door het symbool $D^{\nu}y(x)$. Is $F(z)$ een veelterm

$$F(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0,$$

dan is de differentiaaluitdrukking

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y$$

symbolisch voor te stellen door

$$F(D)y = \{D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0\}y.$$

Zijn $F(z)$ en $G(z)$ twee veeltermen in z, dan geldt

$$\{F(D) + G(D)\}y = F(D)y + G(D)y; \quad \{F(D) \, . \, G(D)\}y = F(D)\{G(D)y\}.$$

Deze betrekkingen geven dus optelling en vermenigvuldiging van veeltermen in het symbool D een zin. Men bewijst gemakkelijk, dat de associatieve, commutatieve en distributieve eigenschappen van optelling en vermenigvuldiging hier gelden.

Stellen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de wortels der vergelijking

$$(1) \qquad F(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

voor, dan is de uitdrukking $F(D)y$ aequivalent met

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2) \dots (D - \lambda_n)y;$$

daarbij is de volgorde der wortels λ willekeurig. Is $n \geqslant 2$, k een natuurlijk getal $\leqslant n$, en zijn de getallen $q_1, q_2, \dots, q_k$ geheel met $1 \leqslant q_1 < q_2 < \dots < q_k < n$, dan is de differentiaalvergelijking

$$(2) \qquad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g(x)$$

aequivalent met het systeem van differentiaalvergelijkingen

$$(3)\quad \begin{cases} (D-\lambda_1)\,(D-\lambda_2)\,\ldots\,(D-\lambda_{q_1})\,\varphi_1 = \varphi_2, \\ (D-\lambda_{q_1+1})\,(D-\lambda_{q_1+2})\,\ldots\,(D-\lambda_{q_2})\,\varphi_2 = \varphi_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (D-\lambda_{q_k+1})\,(D-\lambda_{q_k+2})\,\ldots\,(D-\lambda_n)\,\varphi_{k+1} = g(x), \end{cases}$$

met $\varphi_1(x) = y(x)$. In het bijzonder krijgen we voor $k = n-1$ het systeem

$$(4)\quad \begin{cases} (D-\lambda_1)\,\varphi_1 = \varphi_2, \\ (D-\lambda_2)\,\varphi_2 = \varphi_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (D-\lambda_n)\,\varphi_n = g(x), \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{cases} \varphi_1' - \lambda_1\varphi_1 = \varphi_2, \\ \varphi_2' - \lambda_2\varphi_2 = \varphi_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n' - \lambda_n\varphi_n = g(x). \end{cases}$$

Integreert men de vergelijkingen van een dergelijk systeem achtereenvolgens, beginnend met de laatste, dan verkrijgt men de oplossingen der differentiaalvergelijking (2). Bij het systeem (4) merken we nog op, dat elke oplossing $y(x)$ van (2) en hare afgeleiden $y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ met de, door de volgorde der wortels λ bepaalde, daarbij behoorende „keten" van functies $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$, $g(x)$ verbonden zijn door de lineaire homogene betrekkingen

$$\varphi_1 = y;\ \varphi_2 = y' - \lambda_1 y;\ \varphi_3 = \varphi_2' - \lambda_2\varphi_2 = y'' - (\lambda_1+\lambda_2)y' + \lambda_1\lambda_2 y;\ \ldots$$

en omgekeerd

$$y = \varphi_1;\ y' = \lambda_1\varphi_1 + \varphi_2;\ y'' = \lambda_1\varphi_1' + \varphi_2' = \lambda_1^2\varphi_1 + (\lambda_1+\lambda_2)\varphi_2 + \varphi_3;\ \ldots$$

De integratie der differentiaalvergelijking (2) kan ook worden bewerkstelligd met behulp van de theorie der splitsing van rationale uitdrukkingen in partiëele breuken. De vergelijking (1) bezitte de r verschillende wortels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, achtereenvolgens met de multipliciteiten $m_1, m_2, \ldots, m_r$. Er gelde de breuksplitsing

$$\frac{1}{F(z)} = \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\mu=1}^{m_\rho} \frac{A_{\rho\mu}}{(z-\alpha_\rho)^\mu}.$$

Daar het rechterlid der betrekking

$$1 = \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\mu=1}^{m_\rho} \frac{A_{\rho\mu}F(z)}{(z-\alpha_\rho)^\mu}$$

een veelterm is, kunnen we schrijven

$$y(x) = \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\mu=1}^{m_\rho} \frac{A_{\rho\mu}F(D)}{(D-\alpha_\rho)^\mu}\,y = \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\mu=1}^{m_\rho} A_{\rho\mu}\varphi_{\rho\mu}(x),$$

waarin $\dfrac{F(D)}{(D-\alpha_\rho)^\mu}\,y = \varphi_{\rho\mu}(x)$ gesteld is.

Is $y(x)$ een integraal van (2), dan geldt

$$g(x) = F(D)y = (D - \alpha_\rho)^\mu \left\{ \frac{F(D)}{(D - \alpha_\rho)^\mu} y \right\} = (D - \alpha_\rho)^\mu \varphi_{\rho\mu}(x).$$

Is omgekeerd $\varphi_{\rho\mu}(x)$ een integraal der differentiaalvergelijking

$$(D - \alpha_\rho)^\mu \varphi_{\rho\mu}(x) = g(x) \quad (1 \leqslant \rho \leqslant r;\ 1 \leqslant \mu \leqslant m_\rho),$$

dan geldt voor de functie

$$y(x) = \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\mu=1}^{m_\rho} A_{\rho\mu}\varphi_{\rho\mu}(x),$$

dat

$$F(D)y = \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\mu=1}^{m_\rho} F(D)A_{\rho\mu}\varphi_{\rho\mu}(x) = \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\mu=1}^{m_\rho} \frac{A_{\rho\mu}F(D)}{(D - \alpha_\rho)^\mu}(D - \alpha_\rho)^\mu \varphi_{\rho\mu}(x)$$

$$= \left\{ \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\mu=1}^{m_\rho} \frac{A_{\rho\mu}F(D)}{(D - \alpha_\rho)^\mu} \right\} g(x) = g(x)$$

is, zoodat dan $y(x)$ een integraal van (2) is.

Stellen we de integralen $\varphi(x)$ der differentiaalvergelijking

$$(D - \alpha)^\mu \varphi(x) = g(x)$$

symbolisch voor door

$$\varphi(x) = (D - \alpha)^{-\mu} g(x),$$

dan zijn blijkbaar de integralen $y(x)$ van (2) voor te stellen door

$$y(x) = \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\mu=1}^{m_\rho} A_{\rho\mu}(D - \alpha_\rho)^{-\mu} g(x) = \frac{1}{F(D)} g(x).$$

De theorie der breuksplitsing is dus direct op de theorie der lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten van toepassing.

We veronderstellen nu verder, dat $g(x)$ in een interval I continu is. Is $D^\mu y = g(x)$, dan beteekent het symbool $D^{-\mu}$ in $y(x) = D^{-\mu} g(x)$ blijkbaar een μ-voudige integratie, daar in I

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} dt_\mu \int_{x_0}^{t_\mu} dt_{\mu-1} \ldots \int_{x_0}^{t_2} g(t_1)dt_1 + P(x)$$

is; hierin is x_0 een getal uit I en stelt $P(x)$ een veelterm van hoogstens den graad $\mu - 1$ voor.

Opmerking: Voor de in deze uitdrukking voorkomende μ-voudige integraal bewijst men gemakkelijk de identiteit

$$\int_{x_0}^{x} dt_\mu \int_{x_0}^{t_\mu} dt_{\mu-1} \ldots \int_{x_0}^{t_2} g(t_1)dt_1 = \int_{x_0}^{x} \frac{(x - t)^{\mu-1}}{(\mu - 1)!} g(t)dt.$$

Indien deze integralen voor $x_0 = \infty$ een zin hebben, geldt de identiteit ook in dat geval.

We willen nu nog nagaan, in hoeverre de uitdrukking $(D - \alpha)^{-\mu} g(x)$ om te vormen is. We merken daartoe op, dat

$$D(e^{\alpha x} \varphi) = e^{\alpha x}(D + \alpha)\varphi$$

is. Door volledige inductie bewijst men gemakkelijk voor $\mu \geqslant 1$

$$D^{\mu}(e^{\alpha x} \varphi) = e^{\alpha x}(D + \alpha)^{\mu} \varphi.$$

Daaruit volgt, dat de differentiaalvergelijking

$$(D - \alpha)^{\mu} \varphi = g(x)$$

kan worden omgevormd tot

$$e^{\alpha x} D^{\mu} \left(e^{-\alpha x} \varphi(x)\right) = g(x),$$

zoodat de oplossing $\varphi(x)$ wordt verkregen in den vorm

$$\varphi(x) = (D - \alpha)^{-\mu} g(x) = e^{\alpha x} D^{-\mu} \left(e^{-\alpha x} g(x)\right),$$

dus

$$\varphi(x) = e^{\alpha x} \left\{ \int_{x_0}^{x} dt_{\mu} \int_{x_0}^{t_{\mu}} dt_{\mu-1} \cdots \int_{x_0}^{t_2} e^{-\alpha t_1} g(t_1) dt_1 + \mathrm{P}(x) \right\},$$

derhalve

$$\varphi(x) = e^{\alpha x} \left\{ \int_{x_0}^{x} \frac{(x - t)^{\mu - 1}}{(\mu - 1)!} e^{-\alpha t} g(t)\, dt + P(x) \right\}.$$

§ 2. Zij $g(x)$ een voor $x \geqslant x_0$ gedefinieerde en continue functie, die voor $x \to \infty$ tot een eindige limiet b nadert. Gevraagd wordt, in hoeverre uit dat gegeven iets volgt omtrent het asymptotisch gedrag van de oplossingen der differentiaalvergelijking

(2) $$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = g(x).$$

Deze vraag is door PERRON [1]) beantwoord in de veronderstelling, dat de wortels der karakteristieke vergelijking [2])

(1) $$z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

alle reëel $\neq 0$ zijn. De vergelijking (2) wordt opgelost door middel

---

[1]) O. PERRON, *Über nicht-homogene lineare Differentialgleichungen.* Math. Zeitschr. **6** (1920) S. 161—166.

[2]) Zijn de coëfficiënten $a_\nu(x)$ der differentiaalvergelijking $a_n(x) y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x) y'(x) + a_0(x) y(x) = f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ functies, die voor $x \to \infty$ tot constanten a_ν ($a_n = 1$) naderen, dan heete de vergelijking (1) de *karakteristieke vergelijking* dezer differentiaalvergelijking.

van een systeem (4). Daarbij blijkt, dat ze een integraal $y(x)$ bezit met de limiet $\frac{b}{a_0}$ voor $x \to \infty$, waarbij de afgeleiden $y'(x)$, $y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ voor $x \to \infty$ tot nul naderen. Zijn de n wortels der karakteristieke vergelijking alle negatief, dan bezit elke integraal $y(x)$ van (2) deze eigenschap.

In hetzelfde artikel beschouwt PERRON differentiaalvergelijkingen van den vorm

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x),$$

waarin de coëfficiënten $a_\nu(x)$ voor $x \geqslant x_0$ continue functies van x zijn, die voor $x \to \infty$ tot constanten a_ν naderen. Hetzelfde resultaat als boven wordt hier bewezen, thans echter in de veronderstelling, dat de wortels der karakteristieke vergelijking niet alleen reëel en $\neq 0$, doch ook alle van elkaar verschillend zijn. Het bewijs is onafhankelijk van dat der vorige stelling en wordt geleverd op grond van vroeger [1]) bewezen resultaten omtrent homogene differentiaalvergelijkingen.

De resultaten van PERRON waren voor SPÄTH [2]) aanleiding, de differentiaalvergelijking (2) te onderzoeken, zonder daarbij beperkende veronderstellingen aangaande de wortels der karakteristieke vergelijking te maken. Alleen wordt, als een of meer wortels der karakteristieke vergelijking op de imaginaire as liggen, aan $g(x)$ een voorwaarde opgelegd. Voor elken zoodanigen wortel α wordt dan namelijk de existentie der integralen

$$\text{(5)} \quad \int_{x_0}^{\infty} dt_\mu \int_{t_\mu}^{\infty} dt_{\mu-1} \ldots \int_{t_2}^{\infty} e^{-\alpha t_1} \{g(t_1) - b\} dt_1 \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

geëischt; hierin is m de multipliciteit van den betreffenden wortel α.

Deze voorwaarde is noodzakelijk en voldoende voor de existentie van integralen, die voor $x \to \infty$ een eindige limiet bezitten. Daarbij wordt nog verondersteld, dat $\lim_{x \to \infty} g(x) = b = 0$ is, indien $a_0 = 0$ is.

---

[1]) O. PERRON, *Über lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhängig Variable reell ist* (*erste Mitteilung*), Journ. f. d. reine u. angew. Math. **142** (1913) S. 254—270.

[2]) H. SPÄTH, *Über das asymptotische Verhalten der Lösungen linearer Differentialgleichungen,* Math. Zeitschr. **30** (1929) S. 487—513.